Correction du devoir maison $n°13$

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soit $f \in \mathscr{D}([a,b],\mathbb{R})$.

Partie A : Polynôme d'interpolation de Hermite
On considère l'application :

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}^4 \\ P & \mapsto & (P(a), P'(a), P(b), P'(b)) \end{array}$$

1. Les applications d'évaluation et de dérivation étant linéaires, on montre facilement que Φ est une application linéaire de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}^4$. De plus, $\dim(\mathbb{R}_3[X]) = 4 = \dim(\mathbb{R}^4)$, il suffit donc de prouver que Φ est injective afin de montrer que Φ est un isomorphisme.
   Montrons que $\mathrm{Ker}(\Phi) = \{0\}$. L'inclusion retour est triviale.
   Soit $P \in \mathrm{Ker}(\Phi)$. On a donc $P(a) = P'(a) = P(b) = P'(b) = 0$. Par l'absurde, si $P \neq 0$, alors a et b sont deux racines distinctes de P de multiplicité 2, d'où $\deg(P) \geqslant 4$. Absurde. Donc $P = 0$.
2. L'application Φ étant bijective, $(f(a), f'(a), f(b), f'(b)) \in \mathbb{R}^4$ admet un unique antécédent par Φ i.e. il existe un unique polynôme $H \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $H(a) = f(a)$, $H'(a) = f'(a)$, $H(b) = f(b)$, $H'(b) = f'(b)$. *Ce polynôme est appelé le polynôme d'interpolation de Hermite de f sur $[a,b]$.*

Partie B : Intégrale du polynôme d'interpolation de Hermite
On introduit l'application

$$\Psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & \displaystyle\int_a^b P(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

On note $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_4$ les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^4$. Pour tout $k \in [\![0,3]\!]$, on pose $P_k = (X-a)^k$ puis $\mathscr{B} = (P_0, P_1, P_2, P_3)$. Pour simplifier les écritures, on notera $\delta = b - a$.

3. La famille $\mathscr{B}$ est une famille de 4 polynômes de degré distincts de $\mathbb{R}_3[X]$. C'est donc une famille libre composée de $\dim(\mathbb{R}_3[X]) = 4$ vecteurs. Par conséquent, $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
4. Notons $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{E}_4}(\Phi)$. On a :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \delta & \delta^2 & \delta^3 \\ 0 & 1 & 2\delta & 3\delta^2 \end{pmatrix}$$

   La matrice A est inversible car Φ est un isomorphisme. À l'aide de la matrice augmentée, on trouve

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{\delta^2} & -\frac{2}{\delta} & \frac{3}{\delta^2} & -\frac{1}{\delta} \\ \frac{2}{\delta^3} & \frac{1}{\delta^2} & -\frac{2}{\delta^3} & \frac{1}{\delta^2} \end{pmatrix}$$

   .

5. Par linéarité de l'intégrale, l'application Ψ est linéaire. De plus, $B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{E}_1}(\Psi) = \begin{pmatrix} \delta & \frac{\delta^2}{2} & \frac{\delta^3}{3} & \frac{\delta^4}{4} \end{pmatrix}$.
6. On a $\displaystyle\int_a^b H(t)\,\mathrm{d}t = \Psi\left(\Phi^{-1}\left(f(a), f'(a), f(b), f'(b)\right)\right)$.
7. Par conséquent :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}_1}\left(\int_a^b H(t)\,\mathrm{d}t\right) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{E}_1}(\Psi)\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}_4,\mathscr{B}}(\Phi^{-1})\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}_4}\left(f(a), f'(a), f(b), f'(b)\right)$$

i.e.

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}_1}\left(\int_a^b H(t)\,\mathrm{d}t\right) = BA^{-1}\begin{pmatrix} f(a)\\ f'(a)\\ f(b)\\ f'(b)\end{pmatrix}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}_1}\left(\int_a^b H(t)\,\mathrm{d}t\right) &= \begin{pmatrix}\delta & \frac{\delta^2}{2} & \frac{\delta^3}{3} & \frac{\delta^4}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -\frac{3}{\delta^2} & -\frac{2}{\delta} & \frac{3}{\delta^2} & -\frac{1}{\delta}\\ \frac{2}{\delta^3} & \frac{1}{\delta^2} & -\frac{2}{\delta^3} & \frac{1}{\delta^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} f(a)\\ f'(a)\\ f(b)\\ f'(b)\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\frac{\delta}{2} & \frac{\delta^2}{12} & \frac{\delta}{2} & -\frac{\delta^2}{12}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} f(a)\\ f'(a)\\ f(b)\\ f'(b)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

i.e. $\displaystyle\int_a^b H(t)\,\mathrm{d}t = \frac{\delta}{2}\left(f(a)+f(b)\right) + \frac{\delta^2}{12}\left(f'(a)-f'(b)\right)$.

Partie C : Contrôle de l'erreur commise sur l'intégrale

On suppose à présent que f est de classe $\mathscr{C}^4$.

8. La fonction f^4 étant continue sur un segment, il existe $M \in \mathbb{R}_+$, tel que $\forall t \in [a,b]$, $|f^{(4)}(t)| \leqslant M$.
9. On note h la fonction polynomiale d'interpolation de Hermite de f sur $[a,b]$. On pose $d = f - h$.
   (a) La fonction h est une fonction polynomiale de degré inférieur à 3. Par conséquent, h est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et $h^{(4)} = 0$. Par combinaison linéaire, d est de classe $\mathscr{C}^4$ sur $[a,b]$. De plus, $d^{(4)} = f^{(4)}$.
   (b) On a $d'(a) = f'(a) - h^{'}(a) = 0$ et $d'(b) = f'(b) - h'(b) = 0$. De plus, $d(a) = d(b) = 0$. D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a,b[$ tel que $d'(c) = 0$. Par conséquent, d' s'annule en trois points distincts a, b, c. On utilise à nouveau le théorème de Rolle pour la fonction d' sur $[a,c]$ et sur $[c,b]$. Il existe donc $t_1 \in]a,c[$ et $t_2 \in]c,b[$ tels que $d^{(2)}(t_1) = d^{(2)}(t_2) = 0$. On utilise une dernière fois le théorème de Rolle pour $d^{(2)}$ sur $[t_1,t_2]$, ce qui montre que $d^{(3)}$ s'annule sur $[a,b]$.
   (c) *Lemme.* Soit $g \in \mathscr{D}([a,b],\mathbb{R})$.
   On suppose qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $g(c) = 0$ et $K \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall t \in [a,b]$, $|g'(t)| \leqslant K$.
   D'après l'inégalité des accroissements fini, $\forall t, x \in [a,b]$, $|g(t) - g(x)| \leqslant K|t-x|$.
   Pour $x = c$, on obtient, $\forall t \in [a,b]$, $|g(t)| \leqslant K|t-c| \leqslant K(b-a)$.
   (d) On peut utiliser le lemme pour $g = d^{(3)}$. En effet, $d^{(3)}$ s'annule et $d^{(4)}$ est bornée avec $|d^{(4)}| \leqslant M$.
   Alors $\forall t \in [a,b]$, $|d^{(3)}(t)| \leqslant M(b-a)$.
   On peut utiliser le lemme pour $g = d^{(2)}$ car $d^{(2)}$ s'annule et $|d^{(3)}| \leqslant M(b-a)$.
   Alors $\forall t \in [a,b]$, $|d^{(2)}(t)| \leqslant M(b-a)(b-a) = M(b-a)^2$.
   On peut utiliser le lemme pour $g = d'$ car d' s'annule et $|d^{(2)}| \leqslant M(b-a)^2$.
   Alors $\forall t \in [a,b]$, $|d'(t)| \leqslant M(b-a)^2(b-a) = M(b-a)^3$.
   On peut utiliser le lemme pour $g = d$ car d s'annule et $|d'| \leqslant M(b-a)^3$.
   Conclusion : $\forall t \in [a,b]$, $|d(t)| \leqslant M(b-a)^4$.
10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $s = (t_0, t_1, \ldots, t_n)$ la subdivision régulière du segment $[a,b]$.
    Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on pose h_k la fonction polynomiale d'interpolation de Hermite de f sur le segment $[t_k, t_{k+1}]$. Dorénavant, on réemploie la lettre h pour définir la fonction définie sur $[a,b]$ par $h(t_n) = f(t_n)$ et dont la restriction sur $[t_k, t_{k+1}[$ est égale à h_k pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$.
    (a) La fonction h est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]t_k, t_{k+1}[$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$ car polynomiale sur ces intervalles. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$, étudions la régularité en t_k. La fonction h est continue à droite et dérivable à droite en t_k. De plus, $h(t_k) = h_k(t_k) = f(t_k)$ et $h_d'(t_k) = h_k'(t_k) = f'(t_k)$. Par ailleurs,
    $$h(t) = h_{k-1}(t) \underset{t\to t_k^-}{\longrightarrow} h_{k-1}(t_k) = f(t_k) = h(t_k)\,.$$

Donc h est continue à gauche en t_k, d'où continue en t_k. De plus,

$$h'(t) = h'_{k-1}(t) \underset{t \to t_k^-}{\longrightarrow} h'_{k-1}(t_k) = f'(t_k)\,.$$

D'après le théorème de la limite de la dérivée, h est dérivable à gauche en t_k. De plus, les dérivées à gauche et à droite coïncident. Donc h est dérivable en t_k et même de classe $\mathscr{C}^1$ en t_k.
En a, il n'y a pas de recollement, donc la fonction h est de classe $\mathscr{C}^\infty$.
En b,

$$h(t) = h_n(t) \underset{t \to b^-}{\longrightarrow} h_n(b) = f(b) = h(b)\,.$$

Donc h est continue à gauche en b, d'où continue en b. De plus,

$$h'(t) = h'_n(t) \underset{t \to b^-}{\longrightarrow} h'_n(b) = f'(b)\,.$$

D'après le théorème de la limite de la dérivée, h est dérivable en b et $h'(b) = f'(b)$.
De plus, h est de classe $\mathscr{C}^1$ en b.
Conclusion, la fonction h est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, b]$.

(b) Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$,

$$\left|\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t) - h_k(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_{t_k}^{t_{k+1}} |f(t) - h_k(t)|\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{t_k}^{t_{k+1}} M(t_{k+1} - t_k)^4\,\mathrm{d}t = M(t_{k+1} - t_k)^5\,,$$

d'où $\left|\displaystyle\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t) - h_k(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \dfrac{M(b-a)^5}{n^5}$.

(c) $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b h(t)\,\mathrm{d}t\right| = \left|\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t) - h_k(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{M(b-a)^5}{n^5} = \frac{M(b-a)^5}{n^4}$.

(d)

$$\begin{aligned}\int_a^b h(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} h_k(t)\,\mathrm{d}t\right) &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{\frac{b-a}{n}}{2}\left(f(t_k) + f(t_{k+1})\right) + \frac{\left(\frac{b-a}{n}\right)^2}{12}\left(f'(t_k) - f'(t_{k+1})\right)\right)\\ &= \frac{b-a}{2n}\left(f(a) + f(b) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(t_k)\right) + \frac{(b-a)^2}{12n^2}\left(f'(a) - f'(b)\right)\,.\end{aligned}$$

Partie D : Exemple d'application avec l'approximation de π

11.

```python
def f(x):
    return 4/(1+x**2)

def fp(x):
    return -8*x/((1+x**2)**2)

def subdivision(a,b,n) :
    return [a+k*(b-a)/n for k in range(n+1)]

def approximation_pi(n):
    a=0
    b=1
    t=subdivision(a,b,n)
    S=0
    for k in range(1,n):
        S+=f(t[k])
    return (b-a)/(2*n)*(f(a)+f(b)+2*S)+(b-a)**2*(fp(a)-fp(b))/(12*n**2)

import math
print(approximation_pi(80)-math.pi)
```